Informatik II: Algorithmen und Datenstrukturen SS 2015

Vorlesung 6b, Mittwoch, 3. Juni 2015
(Dynamische Felder: amortisierte Analyse)

Prof. Dr. Hannah Bast
Lehrstuhl für Algorithmen und Datenstrukturen
Institut für Informatik
Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Blick über die Vorlesung heute

- Dynamische Felder, Teil 2
  - Fortsetzung von gestern … Vergrößerungsstrategien 1-3
  - Laufzeitanalyse … neue Technik: amortisierte Analyse
  - Potenzialfunktion … das allgemeine Konzept dahinter
  - Übungsblatt 6: Verallgemeinerung des Codes aus der Vorlesung + Laufzeitanalyse dazu

Dynamische Felder 6/9

- Vergrößerungsstrategie 1
  - Wir vergrößern das Feld nach jedem push_back … und machen es dabei aber immer nur genau **um eins** größer

    Beobachtung: akkumulierte Laufzeit sieht quadratisch aus
- Analyse
  - Sei T_i die Laufzeit für das i-te push_back
  - Dann ist $T_i \geq A \cdot i$ für irgendeine Konstante A

    Bei einer Reallokation müssen alle Elemente kopiert werden

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \geq A \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot A \cdot n(n+1) = \Omega(n^2)$$

Dynamische Felder 7/9

- Vergrößerungsstrategie 2
  - Wie vorher, aber jetzt bei jedem Vergrößern **um C größer**, für ein festes C, zum Beispiel $C = 100$ oder $C = 1000$

    Beobachtung: akkumulierte Laufzeit immer noch quadratisch

- Analyse
  - Sei wieder T_i die Laufzeit für das i-te push_back
  - Dann sind die meisten T_i jetzt $O(1)$
  - Aber für $i = C, 2C, 3C, \ldots$ ist nach wie vor $T_i \geq A \cdot i$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{\lfloor n/C \rfloor} T_{Cj}}_{C=100:\; T_{100} + T_{200} + T_{300} + \ldots} \geq \sum_{j=1}^{\lfloor n/C \rfloor} A \cdot C \cdot j = A \cdot C \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\lfloor n/C \rfloor} j}_{\frac{1}{2}\lfloor n/C \rfloor (\lfloor \frac{n}{C} \rfloor + 1)}$$

$$\approx \frac{1}{2} \underbrace{A \cdot C / C^2}_{A/C} \cdot n^2 = \Omega(n^2)$$

Dynamische Felder 8/9

- Vergrößerungsstrategie 3
  - Wie vorher, aber jetzt machen wir bei jedem Vergrößern das Feld genau **doppelt so groß** wie vorher

    mit Springen

    Beobachtung: jetzt sieht die Laufzeitkurze linear aus

- Analyse
  - Jetzt Reallokationen nur noch bei $i = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

    z.B. $\lfloor \log_2 1000 \rfloor = 9$, $2^9 = 512$

    Bei den Reallokationen $T_i \leq A \cdot i$, sonst $T_i \leq A$

    $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \leq A \cdot n + A(\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k}_{2^{k+1} - 1})$$

$$2^{k+1} - 1 \leq 2 \cdot 2^k \leq 2n$$

z.B. $1 + 2 + 4 = 8 - 1$

$$= O(n)$$

Dynamische Felder 9/9

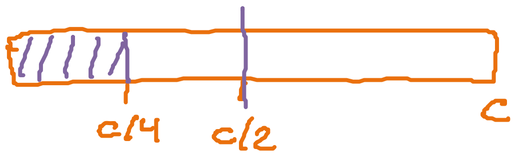
- Entfernen von Elementen
  - Analog zum Vergrößern, könnten wir das Feld auf die Hälfte verkleinern wenn es nur noch halbvoll ist

    Aber: wenn man danach zwei pushBack macht, muss man das Feld gleich wieder vergrößern

    Und: wenn man danach zwei popBack macht, muss man das Feld gleich wieder verkleinern
  - Deswegen machen wir es (erst mal) so:

    Wenn Feld **ganz voll** → Größe **verdoppeln**

    Wenn Feld **viertel voll** → Größe **halbieren**



Laufzeitanalyse 1/7

- Vorbetrachtungen
  - Wir können jetzt beliebige Folgen von pushBack und popBack Operationen haben
  - Dann können wir nicht mehr so leicht vorhersagen, wann realloziert werden muss
  - Das einfache Argument bei nur pushBack (Vergrößerung bei 1, 2, 4, 8, …) funktioniert dann nicht mehr

Laufzeitanalyse 2/7

„size"

„capacity"

- Notation
  - Gegeben n Operationen $O_1, \ldots, O_n$

    Eine beliebige Abfolge von pushBack und popBack
  - Sei s_i die Anzahl Elemente **nach** Operation O_i $(s_0 := 0)$
  - Sei c_i die Größe des Feldes **nach** Operation O_i $(c_0 := 0)$

    Es gilt immer $c_i \geq s_i$ (Feld muss immer groß genug sein)
  - Sei wie vorher T_i die Zeit für Operation O_i
    - Falls Reallokation nicht nötig: $T_i \leq A$
    - Falls Reallokation nötig: $T_i \leq A + B \cdot s_i$

    für irgendwelche Konstanten A und B unabhängig von n

Laufzeitanalyse 3/7

- Wir analysieren folgende Implementierungsversion
  - Falls Operation O_i ein pushBack ist:
    - Reallokation genau dann, wenn $s_{i-1} = c_{i-1}$
    - Vergrößerung so, dass danach $c_i = 2 \cdot s_i$
  - Falls Operation O_i ein popBack ist:
    - Reallokation genau dann, wenn $4 \cdot s_{i-1} \leq c_{i-1}$
    - Verkleinerung so, dass danach $c_i = 2 \cdot s_i$
  - In beiden Fällen ist also direkt nach der Reallokation

    $c_i = 2 \cdot s_i$ also das interne Feld doppelt so groß
  - Das Feld ist immer zu mindestens **einem Viertel** voll

    Ü6: Verallgemeinern auf $s_i \geq f \cdot c_i$ … für $f < 1$ beliebig

z.B. $c_{i-1} = 51$

z.B. $s_i = 52$
$c_i = 104$

$c_{i-1} = 99$
z.B. → bei $s_{i-1} = 24$

z.B.
$s_i = 23$
$c_i = 46$

Laufzeitanalyse 4/7

- Beweisidee
  - Nach einer teuren Operation kommt eine ganze Reihe billiger Operationen

    Teuer sind nur Operationen, wo realloziert werden muss
  - **Genauer:** wenn nach einer Operation die X gekostet hat X Operationen kommen die alle nur 1 kosten, sind die Gesamtkosten bei n Operationen höchstens $2 \cdot n$
  - **Allgemeiner:** wenn nach einer Operation mit Kosten $c_1 \cdot X$ X Operationen kommen mit Kosten c_2, dann sind die Gesamtkosten bei n Operationen höchstens $(c_1 + c_2) \cdot n$

    Man kann die Kosten der teuren Operationen quasi auf die billigen Operationen "umlegen" (amortisieren)

Laufzeitanalyse 5/7

REALL REALL

billig

O_i ---- O_j

- Formaler Beweis
  - **Lemma:** Wenn bei O_i eine Reallokation stattfindet, und die nächste Reallokation danach bei O_j, dann $j - i \geq s_i / 2$

    Nächste Reallokation frühestens nach $s_i/2$ Operationen
  - **Korollar:** Seien die Kosten einer Operation O_i ohne Reallokation $T_i \leq A$ und mit Reallokation $T_i \leq A + B \cdot s_i$

    Dann ist $T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq (A + 3B) \cdot n$

    Eine Operation kostet also im Durchschnitt $\leq A + 3B = O(1)$

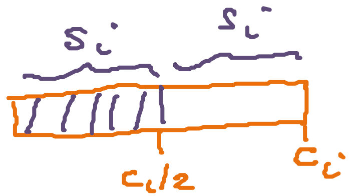
Laufzeitanalyse 6/7

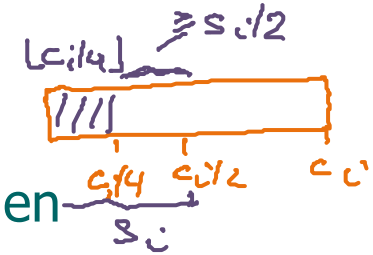
- Beweis des Lemmas
  - Zu zeigen: Wenn bei O_i eine Reallokation stattfindet, und die nächste Reallokation danach bei O_j, dann $j - i \geq s_i / 2$
  - Nach O_i ist auf jeden Fall $c_i = 2 \cdot s_i$

    Egal ob es ein pushBack oder ein popBack war
  - Nächste Vergrößerung wenn $s_j = c_i = 2 \cdot s_i$

    Also nach frühestens $s_i \geq s_i / 2$ Operationen
  - Nächste Verkleinerung wenn $s_j = \lfloor c_i / 4 \rfloor = \lfloor s_i / 2 \rfloor$

    Also nach frühestens $s_i - \lfloor s_i / 2 \rfloor \geq s_i / 2$ Operationen
  - Das Lemma gilt also in jedem Fall





Laufzeitanalyse 7/7

- Beweis des Korollars $T_1 + T_2 + \ldots + T_n \le (A + 3B) \cdot n$

Seien $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_\ell}$ die Operationen bei denen realloziert wird

$i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \le A \cdot n + B \cdot (s_{i_1} + s_{i_2} + \ldots + s_{i_\ell}) = (*)$$

Lemma $\Rightarrow$ $i_2 - i_1 \ge s_{i_1}/2 \iff s_{i_1} \le 2(i_2 - i_1)$

$i_3 - i_2 \ge s_{i_2}/2 \iff s_{i_2} \le 2(i_3 - i_2)$

$\ldots$

$$(*) \le A \cdot n + B \cdot (2(i_2 - i_1) + 2(i_3 - i_2) + \ldots + 2(i_\ell - i_{\ell-1}) + s_{i_\ell})$$

$$\le A \cdot n + 2B\,(\underbrace{i_2 - i_1 + i_3 - i_2 + \ldots + i_\ell - i_{\ell-1}}_{\text{Teleskopsumme}}) + B \cdot \underbrace{s_{i_\ell}}_{\le n}$$

$$\le (A + B) \cdot n + 2B\,(\underbrace{i_\ell - i_1}_{\le n}) = O(n) \quad \blacksquare$$

Beweis mit Potenzialfunktion 1/5

- Variante des Beweises
  - Der Beweis auf den vorherigen Folien hat die Kosten für eine Folge von Operationen quasi "zu Fuß" analysiert
  - Man kann solche Beweise auch mit Hilfe einer sogenannten **Potenzialfunktion** führen

    Intuitiv misst die Potenzialfunktion, wie robust die aktuelle Datenstruktur gegen teure Operationen ist

    Teure Operationen (wie unser reallocate) sollen die Potenzialfunktion erhöhen, und zwar um mindestens $\Theta(X)$, wenn die Kosten der Operation X waren

    Billige Operationen sollen die Potenzialfunktion um höchstens eine Konstante erniedrigen

Beweis mit Potenzialfunktion 2/5

- Potenzialfunktionen, Mastertheorem
  - Gegeben eine Folge von n Operationen $O_1, \ldots, O_n$ auf einer beliebigen Datenstruktur
  - Sei Φ eine Potenzialfunktion, wobei Φ_i = der Wert der Potenzialfunktion **nach** O_i und Φ_0 = Wert am Anfang ≥ 0
  - Sei T_i die Laufzeit für O_i mit $T_i \leq A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$
  - Dann ist die Gesamtlaufzeit $\Sigma\, T_i = O(n + \Phi_n)$
- Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \leq A \cdot n + B \cdot \big(\underbrace{\Phi_1 - \Phi_0 + \Phi_2 - \Phi_1 + \cdots + \Phi_n - \Phi_{n-1}}_{= \Phi_n - \underbrace{\Phi_0}_{\geq 0} \leq \Phi_n} \big)$$

$$\leq A \cdot n + B \cdot \Phi_n$$

$$= O(n + \Phi_n)$$

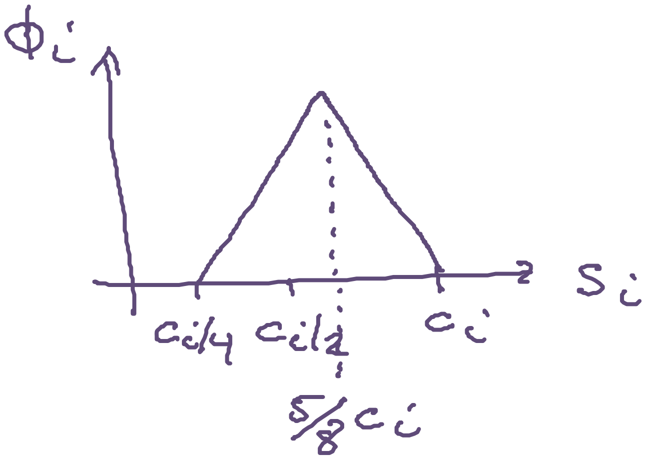
Beweis mit Potenzialfunktion 3/5

- Anwendung des Satzes für dynamische Felder
  - Wie vorher s_i = Anz. Elemente und c_i = Kapazität **nach** O_i
  - Definiere Φ_i := Minimum der Anzahl freier Plätze nach links und nach rechts … siehe unten
  - Dann gilt $T_i \le A' + B' \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$ … Beweis nächste Folie
  - Und damit gemäß Satz $\Sigma\, T_i = O(n + \Phi_n) = O(n)$

$\Phi_i = \min\{c_i - s_i,\ s_i - c_i/4\}$

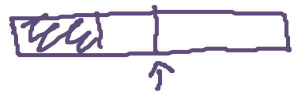
$\Phi_0 := 0$

$\Phi_i \le i \le n$



c_i	s_i	Φ_i
100	50	25
100	80	20
100	40	15
100	60	35

Beweis mit Potenzialfunktion 4/5



$\Phi_i = \min\{c_i - s_i,\; s_i - c_i/4\}$

- Beweis, dass $T_i \le A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$

Fall 1: Reallokation bei O_i $\Rightarrow \Phi_{i-1} \le 1$

Dann $c_i = 2 s_i$ $\Rightarrow \Phi_i \ge s_i/2$

$T_i \le A + B \cdot s_i$ $\Rightarrow s_i \le 2 \cdot \Phi_i \le 2 \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1}) + 2$

$\le \underbrace{A + 2}_{=:A'} + \underbrace{2B}_{=:B'} (\Phi_i - \Phi_{i-1})$

Fall 2: Keine Reallokation bei O_i

Dann $\Phi_i - \Phi_{i-1} \ge -1$

$T_i \le A \le \underbrace{A + 1}_{=:A'} + (\Phi_i - \Phi_{i-1})$ ∎

Beweis mit Potenzialfunktion 5/5

- Vergleich der beiden Beweise
  - Für die dynamischen Felder war der "zu Fuß" Beweis etwas einfacher
  - Der Beweis über die Potenzialmethode ist aber trotzdem etwas intuitiver

    Weil das Potenzial eine intuitive Bedeutung hat

    Und zwar: wie lange es noch mindestens bis zur nächsten Reallokation dauert
  - Wir werden in einer späteren Vorlesung eine Analyse sehen, wo der Beweis über eine Potenzialfunktion einfacher **und** intuitiver ist

Literatur / Links

- Dynamische Felder: Laufzeitanalyse
  - In Mehlhorn/Sanders:

    3.2 Unbounded Arrays
  - In Wikipedia

    http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_array
  - Potenzial vs. Potential

    http://www.duden.de/rechtschreibung/potenzial